

### 3.1 節の問題

[1] 次の線形計画問題の双対問題 (D) を与え、その最適解と最適値を求めよ.

$$(LP) \begin{cases} \text{Min} & 5x_1 + 7x_2 + 11x_3 + 15x_4 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ & x_2 + x_3 + 3x_4 = 20 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

[2] 例 3.1 では, (D1)  $\xrightarrow{\text{双対化}}$  (P1) を仮定して (P1)  $\xrightarrow{\text{双対化}}$  (D1) を導いた. (3.1) の 4 通りの双対化のどれか 1 つを仮定して, 他の 3 通りの双対化を導いてみよう. なお, 全部で  $4 \times 3 = 12$  通りの導き方がある.

## 3.2 弱双対定理と双対定理

線形計画問題の双対関係を再び考えてみよう.  $m \times n$  行列  $A$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  に対して, 以下の (P) を主問題, (D) をその双対問題と考えることにする.

|                                                                                                                                |                                  |                                                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 標準形 主問題                                                                                                                        | 互いに双対関係<br>$\longleftrightarrow$ | 標準形 双対問題                                                                                             |
| (P) $\text{Min} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x}$<br>$\text{s.t.} \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}$<br>$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ |                                  | (D) $\text{Max} \quad \mathbf{b}^T \mathbf{y}$<br>$\text{s.t.} \quad A^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}$ |

上の 2 つの問題で, 主問題の実行可能集合を  $S_P$ , 双対問題の実行可能集合を  $S_D$  と表す<sup>3)</sup>.

$$S_P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \quad S_D = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid A^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}\}$$

主問題と双対問題のそれぞれの実行可能解における目的関数値のあいだには双対性が成り立っていて, このことから「双対」という用語が用いられている. 線形計画問題では, 主問題と双対問題のいずれか一方が最適解をもつか, あるいは両方の実行可能解が存在すれば, 両方の最適値が一致する.

まず最初に, 弱双対定理 (weak duality theorem) を紹介する.

3) 1.4 節と 2.5 節でみたとおり,  $S_P$  と  $S_D$  はどちらも凸多面集合となっている.

**定理 3.1: 弱双対定理**

主問題 (P) とその双対問題 (D) のそれぞれの任意の実行可能解  $\mathbf{x}_0$  と  $\mathbf{y}_0$  に対して、次の不等式が成立する。

$$\mathbf{b}^T \mathbf{y}_0 \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}_0 \quad (3.3)$$

(すなわち、 $\mathbf{x}_0 \in S_P$ ,  $\mathbf{y}_0 \in S_D \implies \mathbf{b}^T \mathbf{y}_0 \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}_0$ )

**証明.** 任意の  $\mathbf{x}_0 \in S_P$  と  $\mathbf{y}_0 \in S_D$  を選ぶと、

$$A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}, \mathbf{x}_0 \geq \mathbf{0}, A^T \mathbf{y}_0 \leq \mathbf{c}$$

が成立している。これらの式と (2.2) を利用して、(3.3) の左辺を考えると、

$$\mathbf{b}^T \mathbf{y}_0 = (A\mathbf{x}_0)^T \mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0^T A^T \mathbf{y}_0 \leq \mathbf{x}_0^T \mathbf{c} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_0$$

となり、 $\mathbf{b}^T \mathbf{y}_0 \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}_0$  が成立する。 □

**系 3.1**

- (1) 主問題 (P) の任意の実行可能解  $\mathbf{x}$  に対して、 $S_D \neq \emptyset$  のとき、以下が成立する。

$$\max_{\mathbf{y} \in S_D} \mathbf{b}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (3.4)$$

- (2) 双対問題 (D) の任意の実行可能解  $\mathbf{y}$  に対して、 $S_P \neq \emptyset$  のとき、以下が成立する。

$$\mathbf{b}^T \mathbf{y} \leq \min_{\mathbf{x} \in S_P} \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (3.5)$$

**証明.** (2) のみを証明する。  $S_P \neq \emptyset$  なので、 $\mathbf{x} \in S_P$  がとれる。このとき、弱双対定理より、 $\mathbf{x} \in S_P$  と  $\mathbf{y} \in S_D$  について、

$$\mathbf{b}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (3.6)$$

となり、 $S_P$  が有界ならば、定理 2.1 から明らかに (3.5) が成立する。また、 $S_P$  が非有界のときは、

$$\mathbf{c}^T \mathbf{d} < 0$$

となる  $S_P$  の端方向  $\mathbf{d}$  が存在すると、どのような  $t > 0$  についても  $\mathbf{x} + t\mathbf{d} \in S_P$  となることから、(3.6) に矛盾する。よって、 $S_P$  のすべての端方向  $\mathbf{d}$  に対して  $\mathbf{c}^T \mathbf{d} \geq 0$  となることから、定理 2.5 から (3.5) が成立する。 □

## 系 3.2

主問題 (P) とその双対問題 (D) の実行可能解  $x_0$  と  $y_0$  が  $c^T x_0 = b^T y_0$  をみたせば,  $x_0$  と  $y_0$  はそれぞれ (P) と (D) の最適解である.

(すなわち,  $x_0 \in S_P$ ,  $y_0 \in S_D$ ,  $c^T x_0 = b^T y_0 \implies \min_{x \in S_P} c^T x = c^T x_0$  かつ  $\max_{y \in S_D} b^T y = b^T y_0$ )

**証明.**  $x_0 \in S_P$  と  $y_0 \in S_D$  について,  $c^T x_0 = b^T y_0$  が成立しているならば, 系 3.1 の (3.4) と (3.5) から,

$$\max_{y \in S_D} b^T y \leq c^T x_0 = b^T y_0, \quad c^T x_0 = b^T y_0 \leq \min_{x \in S_P} c^T x$$

が成立する. よって,

$$\min_{x \in S_P} c^T x = c^T x_0, \quad \max_{y \in S_D} b^T y = b^T y_0$$

が成立する. □

## 系 3.3

主問題 (P) の目的関数の値がいくらでも小さくなるならば, 双対問題 (D) は実行可能解をもたない. また, 双対問題 (D) の目的関数の値がいくらでも大きくなるならば, 主問題 (P) は実行可能解をもたない.

したがって, 主問題 (P) の目的関数との内積の値が負となる, 実行可能集合  $S_P$  の端方向が存在すれば, 目的関数の値がいくらでも小さくなるので, 双対問題 (D) は実行可能解をもたないといえるし, 双対問題 (D) の目的関数との内積の値が正となる, 実行可能集合  $S_D$  の端方向が存在すれば, 目的関数の値がいくらでも大きくなるので, 主問題 (P) は実行可能解をもたないといえる.

また, 弱双対定理 (定理 3.1) および系 3.1 により, 双対問題の実行可能解を 1 つみつつけてその目的関数値を計算すれば, 主問題の最小値を実際に求めなくても, その下界値を知ることができる. もちろん, 双対問題の目的関数値をなるべく大きくする実行可能解をみつければ, より良い下界値を得ることができる. これは数値計算の常套手段である.

次に, 双対定理 (Duality theorem) を紹介する.

**定理 3.2: 双対定理**

問題 (P) または (D) の一方が最適解をもてば、他方も最適解をもち、それらの最適値は一致する。

**証明.** 問題 (P) が最適解をもつとき、その双対問題 (D) も最適解をもつことを示せば十分である。また、線形計画問題が最適解をもてば、少なくとも1つの実行可能基底解  $\tilde{x}$  が最適解となる。そこで、制約条件である連立1次方程式の係数行列  $A$  の列ベクトルのうち、対応する基底行列を  $B_*$  とし、非基底行列を  $N_*$  と表し、また、最適解  $\tilde{x}$  の変数のうち、基底変数ベクトルを  $\widetilde{x_{B_*}}$ 、非基底変数ベクトルを  $\widetilde{x_{N_*}}$  と書くことにする。実際には、 $\widetilde{x_{N_*}} = \mathbf{0}$  である。同様に、目的関数の係数も対応するように、 $c_{B_*}$  と  $c_{N_*}$  と表すことにする。

さて、 $\tilde{x}$  が線形計画問題 (P) の最適解なので、次の条件がみたされている。

$$B_* \widetilde{x_{B_*}} = b, \quad \widetilde{x_{N_*}} = \mathbf{0}, \quad \tilde{x} \geq \mathbf{0}, \quad c_{N_*}^T - c_{B_*}^T B_*^{-1} N_* \geq \mathbf{0}^T \quad (\text{停止条件})$$

ここで、停止条件の両辺を転置して書くと、

$$c_{N_*} - N_*^T (B_*^{-1})^T c_{B_*} \geq \mathbf{0}$$

となり、ここで、

$$\tilde{y} = (B_*^{-1})^T c_{B_*} \quad (\text{シンプレックス乗数 (単体乗数) という}) \quad (3.7)$$

とおくと

$$N_*^T \tilde{y} \leq c_{N_*} \quad (3.8)$$

となる。また、(3.7) を変形すると、

$$B_*^T \tilde{y} = c_{B_*} \quad (3.9)$$

となる。ここで、(3.9) と (3.8) を縦に並べると以下ようになる。

$$A^T \tilde{y} = \begin{pmatrix} B_* & N_* \end{pmatrix}^T \tilde{y} = \begin{pmatrix} B_*^T \\ N_*^T \end{pmatrix} \tilde{y} = \begin{pmatrix} B_*^T \tilde{y} \\ N_*^T \tilde{y} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c_{B_*} \\ c_{N_*} \end{pmatrix} = c$$

よって、 $\tilde{y} \in S_D$ 、つまり、 $\tilde{y}$  は双対問題 (D) の実行可能解である。また、(3.9) より、目的関数値を調べてみると、

$$\begin{aligned} c^T \tilde{x} &= \begin{pmatrix} c_{B_*} \\ c_{N_*} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \widetilde{x_{B_*}} \\ \widetilde{x_{N_*}} \end{pmatrix} = c_{B_*}^T \widetilde{x_{B_*}} + c_{N_*}^T \widetilde{x_{N_*}} = (B_*^T \tilde{y})^T B_*^{-1} b \\ &= \tilde{y}^T B_* B_*^{-1} b = \tilde{y}^T b = b^T \tilde{y} \end{aligned}$$

(主問題と双対問題の目的関数の値が等しくなった) となり, 弱双対定理の系 3.2 により,  $\tilde{y}$  は双対問題 (D) の最適解となり, 問題 (P) と (D) の最適値は一致する.  $\square$

#### 系 3.4

主問題 (P) と双対問題 (D) がともに実行可能解をもてば, それぞれ最適解をもち, 最適値は一致する.

### 3.2 節の問題

[1] 例 2.12 と 3.1 節の問題 [1] の結果と双対定理から最適値について何がわかるか.

## 3.3 二者択一の定理

線形計画問題などの最適化問題でよく現れる 1 次不等式には, 次のような, ある種の双対形式になっている 2 つの命題のうち, いずれか一方だけが必ず成り立つ定理がよく知られている. これらの定理は互いに導くこともでき, **二者択一の定理** (alternative theorem)<sup>4)</sup> とよばれている. それらは**凸集合の分離定理** (separation theorem) を使って単独で証明できるが, ここでは双対定理を利用して証明してみよう.

以下, 3.2 節と同様, 77 ページにある標準形最小化問題 (P) を主問題, (D) をその双対問題として, それぞれの実行可能集合を  $S_P, S_D$  とする. このとき, 以下の**ファルカスの補題** (Farkas lemma) という二者択一の定理が成立する.

#### 定理 3.3: ファルカスの補題

$A$  は  $m \times n$  行列,  $b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$  とするとき, 次の命題のいずれか一方だけが必ず成立する.

- (1)  $Ax = b, x \geq 0$  をみたす  $x \in \mathbb{R}^n$  が存在する.
- (2)  $A^T y \leq 0, b^T y > 0$  をみたす  $y \in \mathbb{R}^m$  が存在する.

4) 二者択一の定理については, 参考文献 [2], [13], [18] をみよ.

**証明.** まず, 次の2つの集合を定義する.

$$X = S_P(A, \mathbf{b}), \quad Y = S_D(A, \mathbf{0}) \cap \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{b}^T \mathbf{y} > 0\}$$

命題 (1) が成立することと  $X \neq \emptyset$  は同値で, また, 命題 (2) が成立することと  $Y \neq \emptyset$  は同値である. したがって,  $X \neq \emptyset \implies Y = \emptyset$  が成立することと,  $X = \emptyset \implies Y \neq \emptyset$  が成立することを示せば十分である. (他は, それぞれの対偶を考えれば明らかである.)

(i)  $X \neq \emptyset \implies Y = \emptyset$  を背理法で示す. すなわち, 命題 (1) が成立するとき, 同時に命題 (2) も成立すると仮定して矛盾を導く. このとき, (2.2) から  $0 < \mathbf{b}^T \mathbf{y} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq 0$  となり, 矛盾が生じる. よって,  $Y = \emptyset$ .

(ii)  $X = \emptyset \implies Y \neq \emptyset$  を双対定理を用いて証明する. まず,  $X = \emptyset$ , つまり,  $S_P(A, \mathbf{b}) = \emptyset$  と仮定すると,

$$(P) \quad \text{Min} \quad \mathbf{0}^T \mathbf{x} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

は実行可能解をもたないので, 双対定理より, 次の双対問題

$$(D) \quad \text{Max} \quad \mathbf{b}^T \mathbf{y} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{0}$$

も最適解をもたない. もし, もつとすると, 主問題 (P) も最適解をもつことになるが, 仮定よりそれはありえない. よって,  $S_D(A, \mathbf{0}) = \emptyset$  となるか, あるいは目的関数の値が  $S_D(A, \mathbf{0})$  上でいくらでも大きくなることがわかる.

しかし, この線形計画問題 (D) には, 自明な実行可能解  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  が存在し,  $\mathbf{0} \in S_D(A, \mathbf{0})$ , つまり,  $S_D(A, \mathbf{0}) \neq \emptyset$  となるので, 自動的に目的関数  $\mathbf{b}^T \mathbf{y}$  の値をいくらでも大きくできる. つまり,  $\mathbf{A}^T \mathbf{y}_k \leq \mathbf{0}$  をみたしたまま,  $\mathbf{b}^T \mathbf{y}_k \rightarrow +\infty$  となるベクトル列  $\{\mathbf{y}_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset Y$  が存在する. したがって,  $Y \neq \emptyset$  となる.  $\square$

ここで, ファルカスの補題の幾何学的解釈を考えてみよう.

○例 3.2.  $m = n = 2$  とし, 行列  $A$  の列ベクトルを  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  とするとき, ファルカスの補題のそれぞれの命題 (1), (2) が成立する2通りの場合について図を描いてみると図 3.1 と図 3.2 のようになる.

図 3.1 においては,  $\mathbf{b} \in \text{cc}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$  となっているので, 1.4 節の (1.17) からファルカスの補題の (1) が成立する. また,  $\mathbf{a}_1^T \mathbf{y} \leq 0, \mathbf{a}_2^T \mathbf{y} \leq 0$  となるどのような  $\mathbf{y}$  に対しても  $\mathbf{b}^T \mathbf{y} \leq 0$  となるので, (2) が成り立たない.

一方, 図 3.2 においては,  $\mathbf{b} \notin \text{cc}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$  より, 1.4 節の (1.17) からファルカスの補題の (1) が成立しない. また,  $\mathbf{a}_1^T \mathbf{y} \leq 0, \mathbf{a}_2^T \mathbf{y} \leq 0$  をみたす  $\mathbf{y}$  をうまく選べば,  $\mathbf{b}^T \mathbf{y} > 0$  となるので, (2) が成立する.  $\square$

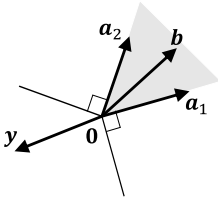


図 3.1 ファルカスの補題で (1) が成立, (2) が不成立の例

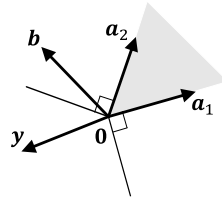


図 3.2 ファルカスの補題で (1) が不成立, (2) が成立の例

○例 3.3. 非負条件付きの連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 &= b_1 \\ -2x_1 + x_2 &+ x_4 = b_2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

の実行可能集合を考える. 連立 1 次方程式の係数行列を  $A$  で表し,  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  に対して,  $A^T y \leq 0$  を計算すると,

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 \leq 0 \\ -2y_1 + y_2 \leq 0 \\ y_1 \leq 0 \\ y_2 \leq 0 \end{cases}$$

となり, これをみたすベクトルは  $y = 0$  だけなので,  $y_1 = 0, y_2 = 0$  となる. つまり, どのような  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  に対しても  $b^T y = 0$  となり, 負とはならない. つまり, ファルカスの補題の (2) が成立しない. よって, ファルカスの補題により, どんな  $b$  に対しても (3.10) は実行可能解をもつ.  $\square$

次に, ファルカスの補題を使って, **モツキンの定理** (Motzkin's theorem) を証明してみよう.

**定理 3.4: モツキンの定理**

$A$  を  $m \times n$  行列,  $B$  を  $m \times p$  行列,  $C$  を  $m \times q$  行列とすると, 次の命題のいずれか一方だけが必ず成立する.

- (1)  $Ax + Bz + Cw = 0, x \geq 0, x \neq 0, z \geq 0$  をみたす  $x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^p, w \in \mathbb{R}^q$  が存在する.
- (2)  $A^T y < 0, B^T y \leq 0, C^T y = 0$  をみたす  $y \in \mathbb{R}^m$  が存在する.

**証明.** モツキンの定理の命題 (2) は,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  と  $\xi \in \mathbb{R}$  が以下の条件をみたすことと同値である.

$$A^T \mathbf{y} + \xi \mathbf{e} \leq \mathbf{0}, \quad B^T \mathbf{y} \leq \mathbf{0}, \quad C^T \mathbf{y} \leq \mathbf{0}, \quad -C^T \mathbf{y} \leq \mathbf{0}, \quad \xi > 0 \quad (3.11)$$

ここで,  $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)^T$  である. このとき, 以下のようにおく.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & B & C & -C \\ \mathbf{e}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \xi \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix}$$

すると, (3.11) は  $(\tilde{A})^T \tilde{\mathbf{y}} \leq \mathbf{0}, (\tilde{\mathbf{b}})^T \tilde{\mathbf{y}} > 0$  と書ける. よって, ファルカスの補題により, もう一方の命題は,  $\tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$  をみたす  $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}^T, \mathbf{z}^T, \mathbf{w}_1^T, \mathbf{w}_2^T)^T$  が存在することである. ここで,  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$  で  $\mathbf{e}^T \mathbf{x} = 1$  より  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  となり,  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$  とおけばモツキンの定理の命題 (1) が導けるし, 逆も導ける.  $\square$

さらに, モツキンの定理の特別な場合として,  $m \times 1$  の行列  $A = (\mathbf{a})$  の場合 ( $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ ) を考えると, 次の定理が得られる.

#### 定理 3.5: (一般) ファルカスの定理

$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ ,  $B$  を  $m \times n$  行列,  $C$  を  $m \times l$  行列とすると, 次の命題のいずれか一方だけが必ず成立する.

- (1)  $\mathbf{a} + B\mathbf{x} + C\mathbf{z} = \mathbf{0}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$  をみたす  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^l$  が存在する.
- (2)  $\mathbf{a}^T \mathbf{y} < 0, B^T \mathbf{y} \leq \mathbf{0}, C^T \mathbf{y} = \mathbf{0}$  をみたす  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  が存在する.

この定理において,  $B = A, C = O, \mathbf{a} = -\mathbf{b}$  とおくことにより, 定理 3.3 (ファルカスの補題) が得られる. よって, 上記の 3 つの定理は同値であることがわかった.

一方, モツキンの定理で  $B = O, C = O$  とおくと, 以下の**ゴルダンの定理**<sup>5)</sup> (Gordan's theorem) も得られる. この定理は, 第 4 章で非線形計画問題の最適性条件を導く際に用いられる.

#### 定理 3.6: ゴルダンの定理

$A$  を  $m \times n$  行列とすると, 次の命題のいずれか一方だけが必ず成立する.

- (1)  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  をみたす  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  が存在する.

5) ゴルダンの定理の分離定理による証明は参考文献 [13] をみよ. また, [2] には, 和書にはない独自の証明方法でゴルダンの定理を証明し, また, ゴルダンの定理を用いて数学的帰納法によりファルカスの補題を証明している.

(2)  $A^T \mathbf{y} < \mathbf{0}$  をみたす  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  が存在する.

ここで、ゴルダンの定理の幾何学的解釈を考えてみよう.

○例 3.4.  $m = 2, n = 3$  とし、行列  $A$  の列ベクトルを  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  とするとき、ゴルダンの定理のそれぞれの命題が成立する 2 通りの場合について図を描いてみると図 3.3 と図 3.4 のようになる.

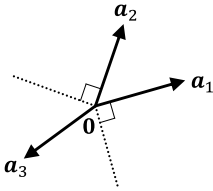


図 3.3 ゴルダンの定理で (1) が成立,  
(2) が不成立の例

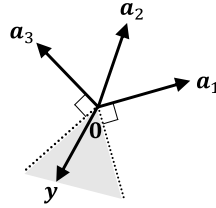


図 3.4 ゴルダンの定理で (1) が不成立,  
(2) が成立の例

図 3.3 においては、 $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2 = \text{cc}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  となっているので、1.4 節の (1.17) からゴルダンの定理の (1) が成立する. また、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  と内積が負になる領域がないので、(2) は成り立たない. 一方、図 3.4 においては、 $\mathbf{0} \in \text{cc}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  とはなっているが、 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$  が成立するのは  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  のときのみなので、ゴルダンの定理の (1) は成立しない. また、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  と内積が負になる領域があり、そのなかから  $\mathbf{y}$  を選べるので、(2) が成立する.

つまり、ゴルダンの定理の (1) は、図 3.3 のように、行列  $A$  のそれぞれの列ベクトルの方向へ綱引きをしてつり合っている状態で、ゴルダンの定理の (2) は、図 3.4 のように、行列  $A$  のそれぞれの列ベクトルの方向へ綱を引っ張ったら、結び目が原点から動いてしまう状態と解釈できる. □

### 3.3 節の問題

[1] 非負条件付きの連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 20 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

の実行可能集合が空集合であることをファルカスの補題を利用して示せ.

## 章 末 問 題

[1] 次の線形計画問題について、以下の各問いに答えよ。

$$(\text{LP}) \quad \begin{cases} \text{Min} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ \text{s.t.} & 2x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

- (1) 問題 (LP) に対する双対問題 (D) を記述せよ。
- (2) (1) で求めた双対問題 (D) の最適解と最適値を求めよ。
- (3) (2) の解答と双対定理から、問題 (LP) について何がわかるか述べよ。

[2] 次の線形計画問題について、以下の各問いに答えよ。

$$(\text{LP}) \quad \begin{cases} \text{Max} & -3x_1 - 3x_2 - 3x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ & 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

- (1) 問題 (LP) に対する双対問題 (D) を記述せよ。
- (2) (1) で求めた双対問題 (D) の最適解と最適値を求めよ。

[3] 次の問いに答えよ。

- (1)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  と  $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  に対して、ファルカスの補題のどちらの命題が成立するのか、具体的なベクトルをみつけて成立する条件を示せ。
- (2)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  と  $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  に対して、ファルカスの補題のどちらの命題が成立するのか、具体的なベクトルをみつけて成立する条件を示せ。